

Математика для экономистов-2

Модуль 2, 2026-7

Озгур Эврен
Российская Экономическая Школа
oevren@nes.ru

Описание курса

Данный курс рассматривает рекурсивные задачи динамической оптимизации, используемые в экономических моделях, с математической точки зрения, чтобы помочь студентам освоить инструменты, необходимые для понимания, формулировки и решения таких задач. Первая половина курса посвящена детерминированным задачам оптимизации в дискретном времени. Во второй половине курса мы будем обсуждать неопределенность.

Требования к курсу, оценивание и политика посещаемости

В течение семестра будут задаваться еженедельные домашние задания (20% оценки) и проводиться итоговый экзамен (80% оценки). В соответствии с общей политикой РЭШ, студенты имеют право на пересдачу, если они пропустили итоговый экзамен по уважительной причине или если они получили на нем неудовлетворительную оценку. Сложность заданий и оценивание на пересдаче могут отличаться от таковых на итоговом экзамене.

Содержание курса

Часть 1: Детерминированное динамическое программирование

1. Уравнение Беллмана, существование решения, свойства функций ценности, приложения
2. Уравнения Эйлера, условия трансверсальности, теорема достаточности
3. Краткий обзор динамической устойчивости

Часть 2: Неопределённость

4. Цепи Маркова и асимптотическая стационарность
5. Стохастическое динамическое программирование, применения

Описание методологии курса

Если позволят внешние условия, преподаватель будет использовать традиционные методы обучения в аудитории (т.е. доска, маркер и устные обсуждения). В противном случае занятия будут проходить онлайн. В любом случае студентам рекомендуется участвовать в лекциях с вопросами и комментариями. Посещаемость особенно важна, поскольку конспектов лекций будет достаточно, и обязательного учебника нет.

Политика академической честности

Списывание, плагиат и любые другие нарушения академической этики в РЭШ не допускаются.

Примеры заданий для оценки

Рассмотрим следующую задачу. Для заданного $k_0 \in \mathbb{R}_+$,

$$\max_{(c_t)_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$$

при условии $c_t \leq k_t$, $k_{t+1} = k_t - c_t$, и $c_t, k_t \in \mathbb{R}_+$ для $t = 0, 1, \dots$ (SP)

k_t и c_t обозначают запас капитала и потребление в момент времени t соответственно, а $\beta \in (0, 1)$ - это дисконтирующий множитель. Сбережения $k_t - c_t$ становятся запасом капитала в момент времени $t+1$.

Пусть $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Для любой функции $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, определим еще одну функцию $Tv : \mathbb{R}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ как

$$Tv(k) = \sup_{c \in [0, k]} \ln(c) + \beta v(k - c) \quad \forall k \in \mathbb{R}_+. \quad (1)$$

Уравнение Беллмана относится к следующему функциональному уравнению:

$$v(k) = Tv(k) \quad \forall k \in \mathbb{R}_+.$$

а) Используйте метод «догадайся и проверь», чтобы найти решение $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения Беллмана.

b) Определите функцию v_0 как $v^0(k) = \frac{\ln k}{1-\beta}$ для каждого $k \in \mathbb{R}_+$. По индукции, пусть $v^n = Tv^{n-1}$ для каждого $n \geq 1$. Используя условия первого порядка для задачи (1), покажите, что $\lim_n v^n(k) = v(k)$

для каждого $k \in \mathbb{R}_+$, где v обозначает функцию, которую вы нашли в пункте (a). (Подсказка. Существует такая константа D , что $v^n(k) = v^0(k) + D \sum_{l=0}^{n-1} \beta^l$ для каждого $k \in \mathbb{R}_+$.)

c) Сделайте вывод, что для любого $k = k_0$ максимальное значение в (SP) равно $v(k)$. Проверьте все предположения в соответствующей теореме, которую мы рассматривали на занятиях.

d) Запишите уравнения Эйлера в терминах уровней потребления.

e) Покажите, что, учитывая ограничения в (SP) и уравнения Эйлера, условие трансверсальности выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_t k_t = 0 \text{ iff } \sum_{t=0}^{\infty} c_t = k_0.$$

f) Сделайте вывод, что оптимальная последовательность потребления, следующая из уравнения Беллмана, также порождается уравнениями Эйлера и условием трансверсальности.